

CLASSIFICATION DES CATÉGORIES ASSOCIÉES À LA MATRICE DES COEFFICIENTS $(m_{ij} = 2)$ D'ORDRE DONNÉE

SAMER ALLOUCH

1. INTRODUCTION

Dans le papier [3] on a étudié l'existence d'une catégorie ayant une matrice donnée, dans ce papier on va travailler sur M_2^n la matrice 2 d'ordre n dont les coefficients sont tous égaux à 2.

On note par $\text{Card}(M_2^n, r)$ le cardinal des catégories réduites dans $\text{Cat}(M_2^n)$. Pour $n=1, 2$ et 3 nous avons trouvé que $\text{Card}(M_2^1, r) = \text{Card}(M_2^2, r) = 1$ et $\text{Card}(M_2^3, r) = 5$.

La question abordée ici est de déterminer la valeur de $\text{Card}(M_2^n, r)$ à n donnée, mais dans ce papier on a exploré leurs bornes par la formule suivante :

$$2^{\lfloor n/3 \rfloor^3} / n! \leq \text{Card}(M_2^n, r) \leq 18^{C_n^3}.$$

2. QUELQUES RÉMARQUES SUR LES FLÈCHES D'UNE CATÉGORIE DE MATRICE M_2^2

Soit \mathcal{A} une catégorie associée à la matrice M_2^2 , dont les objets sont notés par $\{\lambda^1, \lambda^2\}$. On supposera toujours que \mathcal{A} est *réduite*, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'isomorphisme entre objets distincts.

On notera par $E^{i,i} := id_{\lambda^i}$ l'identité de λ^i , et par $F^{i,i}$ l'unique endomorphisme $F^{i,i} \in \mathcal{A}(\lambda^i, \lambda^i)$ distinct de l'identité $F^{i,i} \neq E^{i,i}$.

Remarque 2.1. : *S'il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que $(F^{i,i})^2 = E^{i,i}$ alors on a deux résultats :*

- (1) $gF^{i,i} = g', F^{i,i}f = f'$
- (2) $fg = f'g' \neq fg' = f'g$

Avec $A(\lambda^i, \lambda^j) = \{g, g'\}$ et $A(\lambda^j, \lambda^i) = \{f, f'\}$.

En effet :

partie 1)

On prend par exemple $(F^{1,1})^2 = E^{1,1}$, donc on va démontrer que $gF^{1,1} = g'$ et $F^{1,1}f = f'$.

Ce papier a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-09-BLAN-0151-02 (HODAG).

Si $fF^{1,1} = f'F^{1,1} = f$ par exemple alors :

$$\begin{aligned} g'(F^{1,1})^2 &= g' \\ &= [g'F^{1,1}]F^{1,1} \\ &= (g)F^{1,1} \\ &= g. \end{aligned}$$

Donc $g = g'$ contradiction, alors $gF^{1,1} \neq g'F^{1,1}$.

D'autre part, si $gF^{1,1} = g$ alors il y a deux cas :

(1) Si $fg = F^{1,1}$ alors,

$$\begin{aligned} [fg]F^{1,1} &= F^{1,1} \\ &= f[gF^{1,1}] \\ &= fg \\ &= F^{1,1}. \end{aligned}$$

Donc $F^{1,1} = E^{1,1}$ contradiction.

(2) Si $fg = F^{1,1}$ alors,

$$\begin{aligned} [fg]F^{1,1} &= (F^{1,1})^2 \\ &= E^{1,1} \\ &= f[gF^{1,1}] \\ &= fg \\ &= F^{1,1}. \end{aligned}$$

Donc $F^{1,1} = E^{1,1}$ contradiction.

Dans les deux cas on arrive à une contradiction, ce qui donne :
 $gF^{1,1} = g'$ et La même idée pour démontrer que $F^{1,1}f = f'$.

partie 2)

On a deux cas sur fg suivants :

(1) Si $fg = F^{1,1}$ alors ;

$$\begin{aligned} [fg]F^{1,1} &= (F^{1,1})^2 \\ &= f[gF^{1,1}] \\ &= fg'. \end{aligned}$$

Donc $fg' = F^{1,1} \neq fg$

(2) Si $fg = F^{1,1}$ alors ;

$$\begin{aligned} [fg]F^{1,1} &= (F^{1,1})^2 \\ &= E^{1,1} \\ &= f[gF^{1,1}] \\ &= fg'. \end{aligned}$$

Donc $fg' = E^{1,1} \neq fg$.

Dans les deux cas on trouve que $f'g \neq fg$.

D'autre part, on a $fg = f'g'$, alors il y a deux cas sur fg :

- (1) Si $fg = E^{1,1}$
alors $g'f = gf' = F^{2,2}$ donc ;

$$\begin{aligned} [fF^{2,2}]g' &= f'g' \\ &= F^{1,1}f[g'] \\ &= (F^{1,1})^2 \\ &= E^{1,1}. \end{aligned}$$

Donc $fg = f'g'$

- (2) si $gf = E^{2,2}$ La même démonstration ci-dessus.

Dans les deux cas on arrive à $fg = f'g'$.

Remarque 2.2. :

$Si (F^{i,i})^2 = E^{i,i}$ alors, $\exists(f, g) \in A(\lambda^i, \lambda^j) \times A(\lambda^j, \lambda^i)$ tel que $fg = F^{i,i}$.

En effet :

Par absurde, on pose $fg = E^{i,i}$ pour toute $(f, g) \in A(\lambda^i, \lambda^j) \times A(\lambda^j, \lambda^i)$ c'est en contradiction avec la remarque précédente voir (2.1).

Donc, il existe deux flèches f, g tel que $fg = F^{i,i}$.

Lemme 2.3. : $(F^{1,1})^2 = E^{1,1} \Leftrightarrow (F^{2,2})^2 = E^{2,2}$

Preuve :

On pose $(F^{1,1})^2 = E^{1,1}$ donc on va démontrer que $(F^{2,2})^2 = E^{2,2}$.

Par l'absurde, soit $(F^{2,2})^2 = E^{2,2}$.

D'après la remarque (2.1) et remarque (2.2) alors on a :

Il existe f, g tel que :

$$\begin{aligned} fg &= F^{1,1} \\ gF^{1,1} &= g' \\ F^{1,1}f &= f' \\ fg &= f'g' = F^{1,1} \\ f'g &= fg' = F^{1,1}. \\ fg &= F^{1,1} \Rightarrow [gf]g = gF^{1,1} = g' \text{ donc } gf = F^{2,2} \text{ sinon } g = g'. \\ fg &= F^{1,1} \Rightarrow f[gf] = F^{1,1}f = f' \text{ ce qui donne } fF^{2,2} = f'. \\ f'g &= E^{1,1} \Rightarrow f'[gf] = f \text{ ce qui donne } f'F^{2,2} = f'. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$f' = fF^{2,2} = f(F^{2,2})^2 = [fF^{2,2}]F^{2,2} = f'F^{2,2} = f \text{ contradiction.}$$

Donc $(F^{2,2})^2 = E^{2,2}$.

Lemme 2.4. : $(F^{i,i})^2 = F^{i,i}$.

Preuve :

On pose, il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que $(F^{i,i})^2 = E^{i,i}$.

Par exemple $(F^{1,1})^2 = E^{1,1}$ alors d'après le lemme précédant $(F^{2,2})^2 = E^{2,2}$, ce qui donne que A est non réduite.

D'après les remarques (2.2) et (2.1) alors, il existe deux morphismes f, g tel que $fg = E^{1,1}$.

D'autre part, on pose $gf = F^{2,2}$ alors :

$$\begin{aligned}
 [gf]g &= F^{2,2}g \\
 &= g' && \text{voir la remarque (2.1)} \\
 &= g[fg] \\
 &= gE^{1,1} \\
 &= g.
 \end{aligned}$$

Donc $g = g'$ contradiction.

Donc, $gf = E^{2,2}$ et $fg = E^{1,1}$, ce qui donne les deux objets λ^1 et λ^2 sont isomorphes entre eux, alors \mathcal{A} non-réduite, contradiction.

Donc, $(F^{i,i})^2 = F^{i,i}, \forall i$.

Lemme 2.5. *Pour $i \neq j$ et tout couple de morphismes $f, f' \in \mathcal{A}(\lambda^j, \lambda^i)$ et $g, g' \in \mathcal{A}(\lambda^i, \lambda^j)$, on a :*

$$(1) \quad fg = F^{i,i}$$

$$(2) \quad fF^{j,j} = f'F^{j,j}, \quad F^{i,i}f = F^{i,i}f', \quad gF^{i,i} = g'F^{i,i} \text{ et } F^{j,j}g = F^{j,j}g'.$$

Preuve :

(1) Par absurde

On pose qu'il existe f, g tel que $fg = E^{i,i}$, comme A réduite alors $gf = F^{j,j}$.

D'autre part,

$$g = g(E^{i,i}) = g(fg) = (gf)g = F^{j,j}g.$$

$$\text{Donc } F^{j,j}g = g.$$

La même chose donne $fF^{j,j} = f$.

On a maintenant $fF^{j,j} = f$ ce qui donne $g'f = F^{j,j}$ sinon $g'f = E^{j,j}$

$$\begin{aligned}
 g &= E^{i,i}g \\
 &= (g'f)g \\
 &= g'(fg) \\
 &= g'E^{i,i} \\
 &= g'.
 \end{aligned}$$

Contradiction donc $g'f = F^{j,j}$.

Finalement, on a $fg = E^{i,i}, gf = g'f = F^{j,j}, fF^{j,j} = f$ et $F^{j,j}g = g$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
g &= F^{j,j}g \\
&= (g'f)g \\
&= g'(fg) \\
&= g'E^{i,i} \\
&= g'
\end{aligned}$$

Ce qui donne $g = g'$, contradiction.

Donc $\forall f, g, fg = F^{i,i}$.

(2) on a d'après (1) $fg = f'g = F^{i,i}$ alors,
 $fg = f'g \Rightarrow f(gf) = f'(gf)$ alors $fF^{j,j} = f'F^{j,j}$.

Lemme 2.6. *Pour chaque couple $i \neq j$ il existe un unique morphisme, qui sera noté $F^{i,j} \in \mathcal{A}(\lambda^i, \lambda^j)$ tel que $F^{i,j} = F^{j,j}g = gF^{i,i}$ pour tout $g \in \mathcal{A}(\lambda^i, \lambda^j)$.*

Preuve :

Par absurde,

Soient $g \in \mathcal{A}(\lambda^i, \lambda^j)$ et $f \in \mathcal{A}(\lambda^j, \lambda^i)$, on pose $F^{j,j}g \neq gF^{i,i}$ alors, on peut prendre par exemple : $F^{j,j}g = g'$ et $gF^{i,i} = g$ avec $g \neq g'$.

$$\begin{aligned}
g' &= F^{j,j}g \\
&= (gf)g && \text{voir (2.5)} \\
&= g(fg) \\
&= gF^{i,i} \\
&= g
\end{aligned}$$

Ce qui donne que $g = g'$ contradiction.

Donc, il existe $F^{i,j} \in \mathcal{A}(\lambda^i, \lambda^j)$ tel que $F^{i,j} = F^{j,j}g = gF^{i,i}$.

Pour $i \neq j$ on notera par $G^{i,j}$ l'unique élément de $\mathcal{A}(\lambda^i, \lambda^j)$ distinct de $F^{i,j}$.
Faire attention que $F^{i,j}$ est indépendant du choix de g car $F^{j,j}g = F^{j,j}g'$ voir le lemme (2.5).

Les morphismes de \mathcal{A} sont maintenant notés par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\lambda^1, \lambda^2) &= \{F^{1,2}, G^{1,2}\} \\
\mathcal{A}(\lambda^2, \lambda^1) &= \{F^{2,1}, G^{2,1}\} \\
\mathcal{A}(\lambda^1, \lambda^1) &= \{E^{1,1} = id_{\lambda^1}, F^{1,1}\} \\
\mathcal{A}(\lambda^2, \lambda^2) &= \{E^{2,2} = id_{\lambda^2}, F^{2,2}\}.
\end{aligned}$$

Corollaire 2.7. *La table de multiplication d'une catégorie \mathcal{A} réduite associée à la matrice M_2^2 est donnée, avec les notations ci-dessus, par :*

$$\begin{aligned}
&- E^{j,j}X^{i,j} = X^{i,j}, & X^{i,j}E^{i,i} &= X^{i,j} \\
&- F^{j,k}X^{i,j} = F^{i,k}, & X^{j,k}F^{i,j} &= F^{i,k} \\
&- G^{j,i}G^{i,j} = F^{i,i}
\end{aligned}$$

où $i, j, k \in \{1, 2\}$ et X désigne une lettre E, F, G parmi les possibilités suivant i, j ou k .

Preuve : Ceci est une conséquence des lemmes précédents.

Définition 2.8. On définit $Cat(M_2^n, r, o)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de catégories réduites ordonnées avec matrice M_2^n . Donc $Card(M_2^n, r, o) = Card(Cat(M_2^n, r, o))$.

Ensuite, le groupe symétrique S_n avec $n!$ éléments, agit sur cet ensemble $Cat(M_2^n, r, o)$, et l'ensemble quotient c'est $Cat(M_2^n, r)$, qui est l'ensemble de classes d'isomorphisme de catégories réduites à isomorphisme non-nécessairement ordonné près ; et $Card(M_2^n, r) = Card(Cat(M_2^n, r))$.

Lemme 2.9. $Card(M_2^2, r) = 1$.

En effet : D'après le table de multiplication dans la corollaire précédent, on aura une seule classe des catégories réduites qui sont associées à M_2^2 . Donc $Card(M_2^2, r) = 1$.

3. QUELQUES RÉMARQUES SUR LES FLÈCHES D'UNE CATÉGORIE DE MATRICE M_2^n

Soit maintenant \mathcal{A} une catégorie réduite avec ensemble d'objets $Ob(\mathcal{A}) = \{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$ et de matrice M_2^n . Ceci veut dire que $\mathcal{A}(\lambda^i, \lambda^j)$ a toujours 2 éléments.

Les considérations de la section précédente permettent d'établir des notations pour les morphismes de \mathcal{A} . D'abord on note par $E^{i,i}$ l'identité de λ^i et par $F^{i,i}$ l'unique morphisme distincte de $E^{i,i}$. Ensuite, pour tout triplet $i \neq j$ on considère la sous-catégorie pleine $\mathcal{A}^{[i,j]}$ de \mathcal{A} contenant les deux objets λ^i et λ^j . On note par $F^{i,j} \in \mathcal{A}^{[i,j]}$ l'unique morphisme donné par le lemme 2.6, et par $G^{i,j} \in \mathcal{A}^{[i,j]}$ l'unique morphisme distinct de $F^{i,j}$.

Nous avons donc

$$\mathcal{A}(\lambda^i, \lambda^i) = \{E^{i,i} = id_{\lambda^i}, F^{i,i}\}$$

et, pour $i \neq j$,

$$\mathcal{A}(\lambda^i, \lambda^j) = \{F^{i,j}, G^{i,j}\}.$$

Le corollaire 2.7 donne la table de multiplication pour toute composition de ces morphismes qui ne fait intervenir que deux objets.

Lemme 3.1. Pour un triplet d'objets distincts $i \neq j \neq k \neq i$, nous avons $F^{j,k}X^{i,j} = F^{i,k}$ quelque soit X (i.e. pour $X^{i,j} = F^{i,j}$ ou $G^{i,j}$), et $X^{j,k}F^{i,j} = F^{i,j}$ quelque soit X (i.e. pour $X^{i,j} = F^{i,j}$ ou $G^{i,j}$).

Preuve :

Soit $X^{i,j} \in \{F^{i,j}, G^{i,j}\}$ alors on a deux cas :

Si $X^{i,j} = F^{i,j}$ alors,

$$\begin{aligned} F^{j,k} X^{i,j} &= F^{j,k} F^{i,j} \\ &= (F^{k,k} F^{j,k}) F^{i,j} \\ &= F^{k,k} (F^{j,k} F^{i,j}) \\ &= F^{k,k} (X^{i,k}) \\ &= F^{i,k} \end{aligned}$$

Donc, $F^{j,k} X^{i,j} = F^{j,k} F^{i,j} = F^{i,k}$.

Si $X^{i,j} = G^{i,j}$ alors,

$$\begin{aligned} F^{j,k} X^{i,j} &= F^{j,k} G^{i,j} \\ &= (F^{j,k} F^{j,j}) G^{i,j} \\ &= F^{j,k} (F^{j,j} G^{i,j}) \\ &= F^{j,k} (F^{i,j}) \\ &= F^{i,k} \end{aligned}$$

Donc, $F^{j,k} X^{i,j} = F^{j,k} G^{i,j} = F^{i,k}$.

Alors, dans les 2 cas on a trouvé que $F^{j,k} X^{i,j} = F^{i,k}, \forall X \in \{F, G\}$.

Au vu de ce lemme, pour un triplet d'objets distincts $i \neq j \neq k \neq i$, la multiplication

$$\mathcal{A}(\lambda^j, \lambda^k) \times \mathcal{A}(\lambda^i, \lambda^j) \rightarrow \mathcal{A}(\lambda^i, \lambda^k)$$

et entièrement déterminée par le choix entre deux cas :

$$G^{j,k} G^{i,j} = F^{i,k} \quad \text{noté cas 0, } G^{j,k} G^{i,j} = G^{i,k} \quad \text{noté cas 1.}$$

On définit un invariant $\alpha_{\mathcal{A}}$ par :

$$\begin{array}{ccc} \alpha : \{1, \dots, n\}^3 & \longrightarrow & \{0, 1\} \\ (i, j, k) & \longmapsto & \alpha(i, j, k) \end{array}$$

avec $\alpha(i, j, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \neq k \neq i \text{ et } G^{j,k} G^{i,j} = G^{i,k} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Notre tâche par la suite sera de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur une fonction α , pour qu'il existe une catégorie \mathcal{A} avec $\alpha = \alpha_{\mathcal{A}}$.

Lemme 3.2. $\text{Card}(M_2^3, r) = 5$

En effet :

On remarque que la valeur de $\text{Card}(M_2^3, r)$ ne dépend que la fonction α .

Donc, on va compter 5 catégories réduites non isomorphes.

Soient $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ tel que $i \neq j \neq k \neq i$ alors,

- (1) $\alpha(i, j, k) = 0 \forall i, j, k$ donne la première catégorie nomé A_1
- (2) $\alpha(i, j, k) = 0 \forall (i, j, k) \neq (1, 3, 2)$ donne second catégorie A_2
- (3) $\alpha(i, j, k) = 0 \forall (i, j, k) \neq \{(1, 3, 2); (2, 3, 1)\}$ et $\alpha(1, 3, 2) = \alpha(2, 3, 1) = 1$ donnent la troisième catégorie A_3

- (4) $\alpha(i, j, k) = 0 \forall (i, j, k) \neq \{(1, 3, 2); (3, 2, 1)\}$ et $\alpha(1, 3, 2) = \alpha(3, 2, 1) = 1$ donnent la quatrième catégorie A_4
- (5) $\alpha(i, j, k) = 0 \forall (i, j, k) \neq \{(1, 3, 2); (2, 3, 1); (2, 1, 3)\}$ et $\alpha(1, 3, 2) = \alpha(2, 3, 1) = \alpha(2, 1, 3) = 1$ donnent la cinquième catégorie A_5 .

Définition 3.3. :

\mathcal{A} une catégorie associée à \mathcal{M}_2^n dont les objets sont $\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$.

Soit $(i, j, k) \in \{1, \dots, n\}^3$ alors,

Si $(i \neq j \neq k)$ on dit le triplet $[\lambda^i, \lambda^j, \lambda^k]$ est un triplet distinct.

Si $(i = j = k)$ on dit le triplet $[\lambda^i, \lambda^j, \lambda^k] = [\lambda^i]$ est un triplet identité.

Si $(i = j \neq k)$ on dit le triplet $[\lambda^i, \lambda^j, \lambda^k] = [\lambda^i, \lambda^k]$ est un triplet semi-distinct.

Théorème 3.4. :

Si les conditions sur α sont vérifiées elle correspond à une catégorie unique et toutes les catégories réduites proviennent de cela. Donc la classification des catégories réduites est équivalente à la classification des fonctions α qui satisfont aux conditions suivantes :

- (1) soit $[i, j, k]$ un triplet distinct alors on a l'expression suivante :
 $\alpha(i, j, k) = 1$ alors $\alpha(i, k, j) = 0$ et $\alpha(j, i, k) = 0$.
- (2) Soient i, j, k, l des indices distingués alors on a l'équivalence suivante :

$$\begin{array}{ccc} \alpha(i, j, k) = 1 & \text{et} & \alpha(j, l, k) = 1 \\ \Downarrow & & \\ \alpha(i, j, l) = 1 & \text{et} & \alpha(i, l, k) = 1. \end{array}$$

En effet :

Pour (1) :

On a $\alpha(i, j, k) = 1$, ce signifie que $G^{j,k}G^{i,j} = G^{i,k}$ alors,

$$\begin{aligned} G^{k,j}G^{i,k} &= G^{k,j}(G^{j,k}G^{i,j}) \\ &= (G^{k,j}G^{j,k})G^{i,j} \\ &= F^{j,j}G^{i,j} \\ &= F^{i,j} \end{aligned}$$

Donc, $G^{k,j}G^{i,k} = F^{i,j}$ ce qui donne $\alpha(i, k, j) = 0$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} G^{i,k}G^{j,i} &= (G^{j,k}G^{i,j})G^{j,i} \\ &= G^{j,k}(G^{i,j}G^{j,i}) \\ &= G^{j,k}F^{j,j} \\ &= F^{j,k} \end{aligned}$$

Donc, $G^{i,k}G^{j,i} = F^{j,k}$ ce qui donne $\alpha(j, i, k) = 0$.

Pour (2) :

On a $\alpha(i, j, k) = 1$ et $\alpha(j, l, k) = 1$ alors, $G^{j,k}G^{i,j} = G^{i,k}$ et $G^{l,k}G^{j,l} = G^{j,k}$.

On va démontrer que $\alpha(i, j, l) = 1$.

supposons que $\alpha(i, j, l) = 0$ c.à.d $G^{j,l}G^{i,j} = F^{i,l}$

$$\begin{aligned} G^{l,k}(G^{j,l}G^{i,j}) &= G^{l,k}F^{i,l} \\ &= F^{i,k} \\ &= (G^{l,k}G^{j,l})G^{i,j} \\ &= G^{j,k}G^{i,j} \\ &= G^{i,k} \end{aligned}$$

Donc, $G^{i,k} = F^{i,k}$ contradiction alors, $\alpha(i, j, l) = 1$.

La même pour démontrer $\alpha(i, l, k) = 1$.

Il reste à vérifier l'associativité avec tous les valeurs de α .

Soient $[i, j, l, k]$ un quadruple distinct alors, on va démontrer que $(G^{l,k}G^{j,l})G^{i,j} = G^{l,k}(G^{j,l}G^{i,j})$.

On a les 4 cas suivant :

Cas	$\alpha(i, j, l)$	$\alpha(j, l, k)$
1	1	0
2	0	1
3	0	0
4	1	1

Cas1 :

On a $\alpha(i, j, l) = 1$ et $\alpha(j, l, k) = 0$ alors $\alpha(i, l, k) = 0$ sinon alors $\alpha(i, j, l) = \alpha(i, l, k) = 1$ et d'après la condition 2 du théorème ci-dessus $\alpha(j, l, k) = 1$ contradiction avec l'hypothèse donc $\alpha(i, l, k) = 0$.

D'autre part,

$$(G^{l,k}G^{j,l})G^{i,j} = F^{j,k}G^{i,j} = F^{i,k}$$

$$G^{l,k}(G^{j,l}G^{i,j}) = G^{l,k}G^{i,l} = F^{i,k}$$

$$\text{Donc, } (G^{l,k}G^{j,l})G^{i,j} = G^{l,k}(G^{j,l}G^{i,j}).$$

Cas2 ressemble Cas1 :

Cas3 :

$$(G^{l,k}G^{j,l})G^{i,j} = F^{j,k}G^{i,j} = F^{i,k} = G^{l,k}F^{i,l} = G^{l,k}(G^{j,l}G^{i,j}).$$

Cas4 :

On a $\alpha(i, j, l) = 1$ et $\alpha(j, l, k) = 1$ alors, $\alpha(i, l, k) = \alpha(i, j, k)$ sinon on pose que $\alpha(i, l, k) = 1$ et $\alpha(i, j, k) = 0$.

$\alpha(i, j, l) = \alpha(i, l, k) = 1$ la condition 2 donne $\alpha(i, j, k) = 1$ contradiction donc $\alpha(i, l, k) = \alpha(i, j, k)$ ce signifie que $G^{l,k}G^{i,l} = G^{j,k}G^{i,j}$.

Par ailleurs,

$$(G^{l,k}G^{j,l})G^{i,j} = G^{j,k}G^{i,j} = G^{l,k}G^{i,l} = G^{l,k}(G^{j,l}G^{i,j}).$$

Soient $[i, j, l, k]$ un quadruple semi-distinct alors, on va démontrer que $(G^{l,k}G^{j,l})G^{i,j} = G^{l,k}(G^{j,l}G^{i,j})$.

On a les cas suivantes :

Si $(i=j)$ alors,

$(G^{l,k}G^{j,l})G^{i,j} = (G^{l,k}G^{i,l})F^{i,i} = X^{i,k}F^{i,i} = F^{i,k}$ avec $X \in \{F, G\}$.

$G^{l,k}(G^{i,l}G^{i,i}) = G^{l,k}F^{i,l} = F^{i,k}$.

Donc, $(G^{l,k}G^{j,l})G^{i,j} = G^{l,k}(G^{j,l}G^{i,j})$.

Si (i=l) alors,

Dans ce cas on a deux cas sur $\alpha(j, i, k)$.

- si $\alpha(j, i, k) = 0$ alors $(G^{l,k}G^{j,l})G^{i,j} = (G^{i,k}G^{j,i})G^{i,j} = F^{j,k}G^{i,j} = F^{i,k} = G^{i,k}F^{i,i} = G^{i,k}(G^{j,i}G^{i,j})$
- si $\alpha(j, i, k) = 1$ alors la condition 1 du théorème ci-dessus donne que $\alpha(i, j, k) = 0$, alors $(G^{l,k}G^{j,l})G^{i,j} = (G^{i,k}G^{j,i})G^{i,j} = G^{j,k}G^{i,j} = F^{i,k} = G^{i,k}F^{i,i} = G^{i,k}(G^{j,i}G^{i,j})$

Donc dans ce cas on a $(G^{l,k}G^{j,l})G^{i,j} = G^{l,k}(G^{j,l}G^{i,j})$.

Si (i=k) alors,

$(G^{l,k}G^{j,l})G^{i,j} = (G^{l,i}G^{j,l})G^{i,j} = Y^{j,i}G^{i,j} = F^{i,i}$

$G^{l,k}(G^{j,l}G^{i,j}) = G^{l,i}(G^{j,l}G^{i,j}) = G^{l,i}Z^{i,l} = F^{i,i}$

avec $Y, Z \in \{F, G\}$

Donc, $(G^{l,k}G^{j,l})G^{i,j} = G^{l,k}(G^{j,l}G^{i,j})$.

les qui sont restées la mme idées.

Finalement dans le cas [i,j,k,l] identité bien sur il y a l'associativité.

Lemme 3.5. *Soit $[i, j, k]$ triple semi-distinct ou identité alors $\alpha(i, j, k) = 0$*

Preuve :

Si i=j=k alors $G^{i,i}G^{i,i} = F^{i,i}$ c.à.d $\alpha(i, j, k) = 0$.

Si i=j alors $G^{j,k}G^{i,i} = F^{i,k}$ c.à.d $\alpha(i, j, k) = 0$.

Si i=k alors $G^{j,i}G^{i,j} = F^{i,i}$ c.à.d $\alpha(i, j, k) = 0$.

Si j=k alors $G^{j,j}G^{i,j} = F^{i,j}$ c.à.d $\alpha(i, j, k) = 0$.

Remarque :

Soit [i,j,l,k] un quadruple alors on a la formule suivante :

$$\alpha(i, j, k)\alpha(j, l, k) = \alpha(i, j, l)\alpha(i, l, k).$$

En effet :

Si $\alpha(i, j, k) = \alpha(j, l, k) = 1$ alors la condition deux donne $\alpha(i, j, l) = \alpha(i, l, k) = 1$ donc,

$$\alpha(i, j, k)\alpha(j, l, k) = \alpha(i, j, l)\alpha(i, l, k) = 1.$$

Si $\alpha(i, j, k) = \alpha(j, l, k) = 0$ alors l'un de deux est égale à 0 sinon $\alpha(i, j, l) = \alpha(i, l, k) = 1$ c'est contradiction avec la condition 2 donc,

$$\alpha(i, j, k)\alpha(j, l, k) = \alpha(i, j, l)\alpha(i, l, k) = 0.$$

Si $\alpha(i, j, k) \neq \alpha(j, l, k)$ alors l'un de deux est égale à 0 sinon $\alpha(i, j, l) = \alpha(i, l, k) = 1$ c'est contradiction avec la condition 2 donc,

$$\alpha(i, j, k)\alpha(j, l, k) = \alpha(i, j, l)\alpha(i, l, k) = 0.$$

Finalement, $\alpha(i, j, k) = 0$ si [i,j,k] est semi-distinct ou identité.

4. LES BORNES DES CARDINALITÉS

Notation : On va définir deux notations :

(1) On veut dire par σ la notation suivante :

$$\sigma := \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sup} \frac{\log(\text{Card}(M_2^n, r))}{n^3}.$$

(2) On note le nombre des catégories réduites à isomorphisme ordonnée près qui sont associées à la matrice M_2^n par $\text{Card}(M_2^n, r, o)$.

Par exemple : on va voir dans le lemme(5.10) $\text{Card}(M_2^n, r, o) \leq 18^{C_n^3}$; cette borne étant atteinte dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

Lemme 4.1. : on a les inégalités suivantes :

$$(1) \quad (\text{Card}(M_2^n, r, o)/n!) \leq \text{Card}(M_2^n, r) \leq \text{Card}(M_2^n, r, o).$$

Preuve : Grâce à chacune des définitions de $\text{Card}(M_2^n, r)$ et de $\text{Card}(M_2^n, r, o)$, on arrive à l'inéquation (1).

Théorème 4.2. : Le nombre de configurations de la fonction $\alpha : (i, j, k) \mapsto 0$ ou 1 sur ce triplet $[\lambda^i, \lambda^j, \lambda^k]$, est 18.

Preuve : On peut prendre ce triplet par exemple le triplet $[\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3]$ dans le cas de matrice 2 d'ordre 3.

On a trouvé 5 catégories non isomorphes entre elles associées à M_2^3 voir le théorème(3.2).

Maintenant on a besoin de savoir combien il y a d'isomorphisme ordonne pres, c'est à dire on ne confond pas ceux qui sont semblables. On peut les classer par leur classe d'isomorphisme A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 .

A_1 : il n'y a qu'une ici.

A_2 : Pour que cela marche on doit choisir un couple (ij) distinct parmi 1, 2, 3, il y a 6 choix.

A_3 : Pour que cela marche on doit choisir un couple (ij) mais $(ij) = (ji)$, vu que l'ensemble des réponses est $\{(ij) \text{ et } (ji)\}$, donc il y a 3 choix.

A_4 : Pour que cela marche on doit choisir une suite de 3 éléments distincts, il y a $3! = 6$ choix.

A_5 : c'est un cycle, qui peut aller dans un sens ou dans l'autre, donc il y a 2 choix :

$$(12) + (23) + (31)$$

ou

$$(13) + (32) + (21).$$

Au total on a $A = 1 + 6 + 3 + 6 + 2 = 18$ possibilités ; le nombre des catégories non-réduites à isomorphisme ordonne pres est 18, et c'est le nombre de

fonctions α possible sur 3 indices.

Donc on peut dire aussi $\text{Card}(M_2^3, r, o) = 18$.

Lemme 4.3. : $\text{Card}(M_2^n, r, o) \leq 18^{C_n^3}$.

En effet : Sur chaque triplet $[\lambda^i, \lambda^j, \lambda^k]$ on a le nombre des catégories non-réduites à isomorphisme ordonné pres est 18 voir le théorème (4.2), alors totalemnet on a $18^{C_n^3}$ ce qui donne $\text{Card}(M_2^n, r, o) \leq 18^{C_n^3}$.

Corollaire 4.4. : La borne supérieure de $\text{Card}(M_2^n, r)$ est $18^{C_n^3}$.

Preuve : le lemme (4.3) et le lemme (4.1) donnent :

$$\text{Card}(M_2^n, r) \leq 18^{C_n^3}$$

Notation : On considère $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble (ordonnée) de n objets. Soit $P_3(X)$ l'ensemble des parties a trois elements de X , et $O_3(X)$ l'ensemble des triplets distincts (avec un ordre qui peut etre different de l'ordre de X). On a donc $\text{Card}(O_3(X)) = 3! \text{Card}(P_3(X))$ et $\text{Card}(P_3(X)) = C_n^3$. Un triplet $(x_i, x_j, x_k) \in O_3(X)$ sera noté aussi (i, j, k) , on a $i \neq j$, $j \neq k$ et $i \neq k$.

Définition 4.5. : Soit $H \subset O_3(X)$ un sous-ensemble. On dit que H est non-interferant si : pour tout $(i, j, k) \in H$, il n'existe pas de $(i, u, j) \in H$ ni de $(j, v, k) \in H$.

Lemme 4.6. Si $H \subset O_3(X)$ est un sous-ensemble non-interferant, alors pour tout $H' \subset H$, on a H' aussi non-interférent.

Preuve : Soit H' un sous ensemble de H , on va démontrer H' est non-interférent.

Soit $(i, j, k) \in H' \subset H$ comme H' est non-interferant alors il n'existe pas de $(i, u, j) \in H'$ ni de $(j, v, k) \in H'$, donc H' est aussi non-interférent.

Lemme 4.7. : Si $H \subset O_3(X)$ est un sous-ensemble non-interférent, il existe une catégorie $A_H \in M_2^n$ telle que $(i, j, k) = 1$ si $(i, j, k) \in H$ et $(i, j, k) = 0$ si $(i, j, k) \notin H$.

Preuve : On construit la catégorie B avec les conditions suivantes :

- (1) Si $(i, j, k) \in H$ alors $\alpha(i, j, k) = 1$, et si $(i, j, k) \notin H$ alors $\alpha(i, j, k) = 0$.
- (2) Pour tout quadruplet i, u, j, k alors :
 $\alpha(i, j, k) = 1$ et $\alpha(i, u, j) = 1 \Leftrightarrow \alpha(i, u, k) = 1$ et $\alpha(u, j, k) = 1$, c'est analogue a la remarque(3.4)

Alors B est bien une catégorie.

Lemme 4.8. : Si $H \subset O_3(X)$ est un sous-ensemble non-interférent, alors il y a une catégorie différente (réduite) $A_{H'} \in M_2^n$ pour chaque sous-ensemble $H' \subset H$. En conséquence, on a

$$\text{Card}(M_2^n, r, o) \geq 2^{\text{Card}(H)}.$$

En effet : Soit $H' \subset H$ alors H' est non-interférant alors d'après le lemme (4.7) alors il existe une catégorie $B_{H'}$, bien sur $A_H \neq B_{H'}$ car $H' \subset H$ et ce qui donne $\text{Card}(M_2^n, r, o) \geq 2^{\text{Card}(H)}$.

Théorème 4.9. : *On peut déterminer des bornes (voir ci-dessous) pour la cardinalité de l'ensemble $\text{Card}(M_2^n, r, o)$.*

Preuve : Construction d'un sous-ensemble non-interferant : supposons que $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ est une reunion avec $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1 \cap X_3 = \emptyset$, et et $X_2 \cap X_3 = \emptyset$ (c.à.d X est la reunion disjointe de X_1, X_2, X_3). Alors si on pose

$$H = \{(i, j, k)/x_i \in X_1, x_j \in X_2 \text{ et } x_k \in X_3\}.$$

Le sous-ensemble $H \subset O_3(X)$ est non-interferant. En effet, les conditions impliquent déjà que $i \neq j$, $j \neq k$ et $i \neq k$, aussi qu'il ne peut pas y avoir d'elements (i, u, j) ni de (j, v, k) dans H .

Cet ensemble a $\text{Card}(H) = \text{Card}(X_1)\text{Card}(X_2)\text{Card}(X_3)$.

On peut prendre par exemple :

$$\text{Card}(X_1) = [n/3], \text{Card}(X_2) = [n/3] \text{ et } \text{Card}(X_3) = n - 2[n/3] \geq [n/3].$$

Donc $\text{Card}(H) \geq [n/3]^3$ qui est de l'ordre de $n^3/27$. On a la borne inférieure :

$$\text{Card}(M_2^n, r, o) \geq 2^{[n/3]^3}.$$

Donc

$$\log(\text{Card}(M_2^n, r, o)) \geq n^3 \log(2)/27.$$

La borne supérieure est $18^{C_n^3}$ voir le lemme (4.3)c.à.d :

$$\text{Card}(M_2^n, r, o) \leq 18^{C_n^3}.$$

Et C_n^3 est de l'ordre de $n^3/6$, donc

$$\log(\text{Card}(M_2^n, r, o)) \leq n^3 \log(18)/6.$$

On a donc un encadrement de $\log(\text{Card}(M_2^n, r, o))$ ou les deux termes ont un ordre de croissance de n^3 .

Lemme 4.10. : *On peut déterminer des bornes inférieures et supérieures (dont les valeurs ci-dessous) pour $\text{Card}(M_2^n, r)$.*

En effet : Le lemme (4.1) et le théorème (4.9)donnet la borne supérieur de $\text{Card}(M_2^n, r)$ qui est :

$$2^{[n/3]^3}/n! \leq \text{Card}(M_2^n, r, o)/n! \leq \text{Card}(M_2^n, r).$$

D'autre part, on a d'après le corollaire (4.4) $\text{Card}(M_2^n, r) \leq 18^{C_n^3}$.

Donc on peut dire :

$$2^{[n/3]^3}/n! \leq \text{Card}(M_2^n, r) \leq 18^{C_n^3}.$$

Théorème 4.11. : *On peut borner σ par :*

$$\frac{\log(2)}{27} \leq \sigma \leq \frac{\log(18)}{6}.$$

preuve : D'après la preuve de le théorème (4.9) on a le résultat suivant :

$$\log(\text{Card}(M_2^n, r, o)) \leq n^3 \log(18)/6.$$

Alors

$$\log(\text{Card}(M_2^n, r, o))/n^3 \leq \log(18)/6.$$

Le lemme (4.1) donne :

$$\begin{aligned} \log(\text{Card}(M_2^n, r))/n^3 &\leq \log(\text{Card}(M_2^n, r, o))/n^3 \\ &\leq \log(18)/6. \end{aligned}$$

Donc $\sigma \leq \log(18)/6$.

D'autre part, on a $2^{[n/3]^3}/n! \leq \text{Card}(M_2^n, r)$ voir le lemme (4.9) alors :

$$\begin{aligned} 2^{[n/3]^3}/n! &\leq \text{Card}(M_2^n, r) \\ \Rightarrow n^3/27 \log(2) - \log(n!) &\leq \log(\text{Card}(M_2^n, r)) \\ \Rightarrow \log(2)/27 - \log(n!)/n^3 &\leq \log(\text{Card}(M_2^n, r))/n^3 \\ \Rightarrow \log(2)/27 - \lim_{n \rightarrow \infty} \log(n!)/n^3 &\leq \sigma \\ \Rightarrow \log(2)/27 - 0 &\leq \sigma \\ \Rightarrow \log(2)/27 &\leq \sigma. \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\log(2)}{27} \leq \sigma \leq \frac{\log(18)}{6}.$$

RÉFÉRENCES

- [1] S. Allouch. Classification des catégories finies. <http://math.unice.fr/~carlos/documents/allouchJun07.pdf>, Mémoire de M2, 15 juin(2007).
- [2] S. Allouch. Sur l'existence d'une catégorie ayant une matrice strictement positive donnée. Preprint arXiv :0806.0060v1 (2008).
- [3] S. Allouch. On the existence of a category with a given matrix. Preprint arXiv :1007.2884 (2010).
- [4] C. Berger, T. Leinster. The Euler characteristic of a category as the sum of a divergent series. Homology, Homotopy Appl. 10 (2008), 41-51.
- [5] G. Brinkmann, B. McKay. Posets on up to 16 Points. Order 19(2002), 147-179.
- [6] M. Cuntz, I. Heckenberger. Weyl groupoids with at most three objects. Preprint arXiv :0805.1810v1 [math.GR].
- [7] T. Fiore, W. Lück, R. Sauer. Finiteness obstructions and Euler characteristics of categories. Preprint arXiv :0908.3417 (2009).
- [8] T. Fiore, W. Lück, R. Sauer. Euler characteristics of categories and homotopy colimits. Preprint arXiv :1007.3868 (2010).
- [9] M. Fleming, R. Gunther, R. Rosebrugh. A Database of Categories. Journal of Symbolic Computation 35 (2003), 127-135.
- [10] M. Forrester-Barker. Group objects and internal categories. Preprint arXiv :math/0212065v1.
- [11] M. Jacobsen, J. Møller. Euler characteristics of Frobenius categories. Preprint arXiv :1007.1890 (2010).

- [12] M. Kapranov. On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces. *Invent. Math.* 92 (1988), 479-508.
- [13] T. Leinster. The Euler characteristic of a category. *Doc. Math.*, 13 (2008), 21-49, arXiv :math/0610260.
- [14] K. Noguchi. The Euler characteristic of infinite acyclic categories with filtrations. Preprint arXiv :1004.2547 (2010).
- [15] A. Distler, T. Kelsey. The monoids of orders eight, nine and ten. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* **56** (2009), 3-21.

LABORATOIRE J. A. DIEUDONNÉ, UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS